26/3/21

• Τι έχουμε δει έως τώρα:

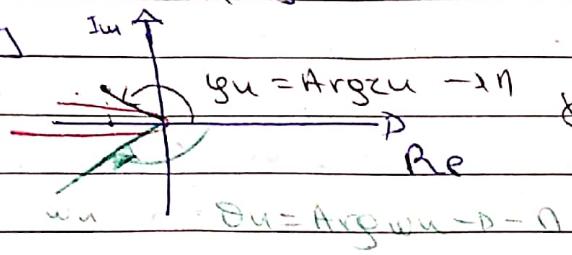
α) Το $\mathbb{C}$ και οι ιδιότητες του

β) Ορισμοί και ιδιότητες μιγαδικών συναρτήσεων $f: D \to \mathbb{C}, D \subset \mathbb{C}$ και όρια και συνέχεια αυτών

Στα αμέσως επόμενα μαθήματα:

γ) διαφορισιμότητα μιγαδικών συναρτήσεων

Από τη συνέχεια, το "σημαντικότερο" αποτέλεσμα είναι: η $\mathrm{Arg}: \mathbb{C}^* \to (-\pi, \pi] \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ είναι συνεχής μόνο στο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$



για $z_n \to z_0 \in (-\infty, 0]$ με $\mathrm{Im}\, z_n > 0$ $\subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

για $w_n \to z_0$ με $\mathrm{Im}\, w_n < 0$

Κεφ 3-5: (Μιγαδική) διαφορισιμότητα μιγαδικών συναρτήσεων

Κεντρικός ορισμός: Έστω $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό και $z_0 \in D$. Τότε η $f: D \to \mathbb{C}$ ονομάζεται (μιγαδικά) διαφορίσιμη ή ($\mathbb{C}$-) διαφορίσιμη στο z_0, αν $\exists$ [(στο $\mathbb{C}$) το όριο]:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0) \in \mathbb{C}$$

Παρατήρηση: Οι παρενθέσεις στο (μιγαδικά) και στο ($\mathbb{C}$-) σημαίνουν ότι αν είναι σαφείς για το τι μιλάμε, δεν χρειάζονται.

Προσοχή όμως: Ένα βασικό ερώτημα που θα μας απασχολήσει είναι: ποια είναι η σχέση της μιγαδικής διαφορισιμότητας της $f: D \to \mathbb{C}$ στο $z_0 \in D \subset \mathbb{C}$ (ανοικτό) με την (πιθανή) διαφορισιμότητα του αντίστοιχου διανυσματικού πεδίου:

$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}: D \to \mathbb{R}^2$ με $(x_0, y_0) \in D \subset \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $\begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Re\, f(x+iy) \\ Im\, f(x+iy) \end{pmatrix} \iff f(x+iy) = u(x,y) + i v(x,y)$

Το όριο $f'(z_0) \in \mathbb{C}$ του προηγούμενου ορισμού, αν $\exists$, ονομάζεται (μιγαδική ή $\mathbb{C}$-) παράγωγος της f στο z_0

Παρατήρηση: Βλέπουμε ότι τυπικά η μιγαδική παράγωγος ορίζεται όπως (δηλ. με τον ίδιο τρόπο) και η παράγωγος πραγματικής συνάρτησης μιας πραγμ. ανεξ. μεταβλητής $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ (ανοικτό) στο $x_0 \in D$. [Δεν μας εκπλήσσει, αφού όπως και στο $\mathbb{R}$ έτσι και στο $\mathbb{C}$ ορίζεται πηλίκο (διαφορών): $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$, σε αντίθεση με αυτό που συμβαίνει για διανυσματικό πεδίο του $\mathbb{R}^2$]

Άμεσα συνδεδεμένοι όροι: Αν η $f: D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, είναι μιγαδικά διαφορίσιμη σε κάθε $z \in D$, τότε λέμε ότι η f είναι ολόμορφη. Ειδικότερα, αν $D = \mathbb{C}$, τότε λέμε ότι η f είναι ακέραια

Παρατήρηση: Βέβαια, αν μας δοθεί μια $f: D \to \mathbb{C}$ με $D \subset \mathbb{C}$ όχι ανοικτό, σίγουρα μπορούμε να εξετάσουμε τη μιγαδική διαφορισιμότητα της, όπως δίνεται από ~~τη σχέση~~ τον ορισμό σε κάθε σημείο $z_0 \in int\, D \; [= \mathring{D}] \subset D \subset \mathbb{C}$, αφού μας ενδιαφέρει μόνο το όριο $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \; (= f'(z_0)) = \lim_{z \to z_0} \frac{f|_{\mathring{D}}(z) - f|_{\mathring{D}}(z_0)}{z - z_0} = \left(f|_{\mathring{D}}\right)'(z_0)$ για $z_0 \in \mathring{D}$ [αφού για $z \in \mathring{D}$: $f|_{\mathring{D}}(z) = f(z)$]

Συνοψίζουμε: Μέχρι στιγμής ουσιαστικά γνωρίσαμε μόνο τον ορισμό της (μιγαδικής) παραγώγου μιγαδικής συνάρτησης σ' ένα σημείο

[Προς τη σχέση με τη διαφορισιμότητα του αντίστοιχου διαν. πεδίου] στον $\mathbb{R}^2$

Ισοδύναμος χαρακτηρισμός μιγαδ. διαφ. σ' ένα z_0:

Λήμμα: Η $f: D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, είναι $\mathbb{C}$-διαφ/μη (δηλ. μιγαδικά διαφ/μη) στο $z_0 \in D$ $\Leftrightarrow$ $\exists\, \lambda \in \mathbb{C}$: $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - \lambda(z-z_0)}{z - z_0} = 0$ $(*)$. Αν το $(*)$ ισχύει, τότε το $\lambda \in \mathbb{C}$ που ικανοποιεί το $(*)$ είναι μοναδικό και $\lambda = f'(z_0)$.

Αποδ: $(\Rightarrow)$: Έχουμε $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) \in \mathbb{C}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)}{z - z_0} = 0$

$(\Leftarrow)$ Έχουμε (αν $\exists$) $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \overset{z \neq z_0}{=} \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - \lambda(z-z_0) + \lambda(z-z_0)}{z - z_0}$

$= \underbrace{\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - \lambda(z - z_0)}{z - z_0}}_{=0} + \underbrace{\lim_{z \to z_0} \frac{\lambda \cancel{(z - z_0)}}{\cancel{z - z_0}}}_{=\lambda}$

(αν $\exists$)

Άρα βρήκαμε ότι το $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lambda \in \mathbb{C}$ [όπου το $\lambda \in \mathbb{C}$ είναι αυτό που έχουμε από το $*$] και συνεπώς η f είναι μιγ. διαφ. στο $z_0 \in D$ με $f'(z_0) = \lambda$ και άρα το $\lambda \in \mathbb{C}$ είναι μοναδικό.

Οι ιδιότητες των μιγ. διαφ/μων στο $z_0 \in D$ μιγ. συναρτ. είναι οι "αναμενόμενες", γνωστές από ΑΠΕΙ 1/3

(α) f ($\mathbb{C}$-) διαφ/μη στο $z_0 \Rightarrow f$ συνεχής στο z_0

(β) άλγεβρα παραγώγων [$(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$, $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$ και αν $g'(z_0) \neq 0$ $\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{(g(z_0))^2}$]

(γ) κανόνας αλυσίδας: f διαφ. στο z_0, g διαφ. στο $f(z_0)$ $\Rightarrow (g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$

α. Παραδείγματα βασικών μιγ. διαφ/μων συναρτ.

(βλ. παραδ. 3.1.1 Σημ.) [* αλλά και την άλγεβρα παραγώγων]

Από τον ορισμό ή ήδη (*) βλέπουμε ότι οι ακόλουθες $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ είναι ακέραιες, δηλ. ολόμορφες στο $\mathbb{C}$, δηλ. (μιγαδικά) διαφ/μες ή $\mathbb{C}(\mathbb{C}-)$ διαφ/μες στο $\mathbb{C}$, δηλ.
-"- -"- -"- σε κάθε $z\in\mathbb{C}$:

(α) οι σταθερές, $f(z)=c$, $c\in\mathbb{C}$, $\forall z\in\mathbb{C}$ με $f'(z)=0$

(β) η ταυτοτική, $f(z)=z$, $\forall z\in\mathbb{C}$ με $f'(z)=1$

(γ) η $f(z)=z^n$, $n\in\mathbb{N}\,(=\{1,2,3,\dots\})$, $\forall z\in\mathbb{C}$ με $f'(z)=nz^{n-1}$

[Με άλγεβρα παραγώγων, επαγωγικά, αφού η ταυτοτική είναι ακέραια, ή κατευθείαν $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{z^n-z_0^n}{z-z_0}=\lim\limits_{z\to z_0}\left(\sum\limits_{k=0}^{n-1}z^k z_0^{n-1-k}\right)\overset{\text{βλ. στα όρια}}{=}$

$=\lim\limits_{z\to z_0}\left(\sum\limits_{k=0}^{n-1}z_0^{n-1}\right)=nz_0^{n-1}$]

(δ) από το (γ) και άλγεβρα παραγώγων προκύπτει ότι όλα τα πολυώνυμα του z είναι ακέραιες συναρτήσεις και ότι όλες οι ρητές συναρτήσεις είναι ολόμορφες στο πεδίο ορισμού τους (δηλ. εκεί όπου ο παρονομαστής δεν μηδενίζεται) το οποίο είναι ανοικτό (Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας/ βλ. ειδικότερα το επόμενο (ε))

(ε) η $f(z)=\dfrac{1}{z^n}$, $n\in\mathbb{N}$, $z\in\mathbb{C}^*$ με $f'(z)=-n\cdot\dfrac{1}{z^{n+1}}$

[$\lim\limits_{z\to z_0}\left(\dfrac{1}{z^n}-\dfrac{1}{z_0^n}\right)\dfrac{1}{z-z_0}=\lim\limits_{z\to z_0}\left(-\dfrac{z^n-z_0^n}{z-z_0}\,\dfrac{1}{z^n z_0^n}\right)=$

$=-nz_0^{n-1}\dfrac{1}{z_0^{2n}}=-n\dfrac{1}{z_0^{n+1}}$]

όμως: Υπάρχουν και άλλες βασικές συναρτήσεις, πολύ απλές, οι οποίες δεν είναι μιγαδικά διαφορίσιμες:

(Α) Η συνάρτηση του συζυγούς: $f(z)=\bar{z}$, $z\in\mathbb{C}$, είναι συνεχής στο $\mathbb{C}$ $[\ |\bar{z}-\bar{z_0}|=|z-z_0|\ ]$ δεν είναι πουθενά στο $\mathbb{C}$ μιγαδικά διαφ/μη: $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{\bar{z}-\bar{z_0}}{z-z_0}=\lim\limits_{z-z_0\to 0}\dfrac{\overline{z-z_0}}{z-z_0}=$

$=\lim\limits_{w\to 0}\dfrac{\bar{w}}{w}\ \nexists$

Επανάληψη: Για $z=x+iy$: $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\bar{z}}{z}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\bar{z}^2}{|z|^2}=$

$=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{(x-iy)^2}{x^2+y^2}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{x^2-y^2-2i(x-y)}{x^2+y^2}\ \underset{\text{ων }\exists}{\overset{z\neq 0}{=}}$

$=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-2i\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ όμως και τα 2 $\nexists$ στο $\mathbb{R}$

αλλιώς: $z_n=\dfrac{1}{n}\to 0\Rightarrow\dfrac{\bar{z_n}}{z_n}=1\to 1$ ενώ:

$z_n=\dfrac{i}{n}\to 0\Rightarrow\dfrac{\bar{z_n}}{z_n}=\dfrac{-i}{i}=-1\to -1\neq 1\ ]$

Ποιο είναι το αντίστοιχο διανυσματικό πεδίο στον $\mathbb{R}^2$ της $f(z)=\bar{z}\Leftrightarrow f(x+iy)=\overline{x+iy}=x-iy$; Είναι το

$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}(x,y)=\begin{pmatrix}\mathrm{Re}f(x+iy)\\ \mathrm{Im}f(x+iy)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\-y\end{pmatrix},\ (x,y)\in\mathbb{R}^2$

το οποίο είναι διαφορίσιμο διαν. πεδίο του $\mathbb{R}^2$ με

$D\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}(x,y)=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$

Άρα υπάρχουν $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ οι οποίες δεν είναι πουθενά στο $\mathbb{C}$ μιγαδικά διαφορίσιμες, ενώ τα αντίστοιχα διανυσματικά πεδία στον $\mathbb{R}^2$, όχι απλώς είναι παντού στο $\mathbb{R}^2$ διαφορίσιμα αλλά και άπειρες φορές συνεχώς διαφ/μα

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \iff u, v \in C^\infty(\mathbb{R})$$

Για να δούμε ακριβώς τι συμβαίνει θα πρέπει να δούμε τι σημαίνει για το αντίστοιχο διαν. πεδίο στον $\mathbb{R}^2$ το ότι μία μιγαδική συνάρτηση είναι ~~[illegible]~~ μιγαδ. διαφ. σ' ένα το